NOT: Kök ve kuvvetler için önemli bir lineer yaklaşım, x, 0'a yakın ve k herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$(1+x)^k \approx 1+kx$$

şeklindedir.

Örnek: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1+\frac{1}{2}x \quad , k=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1+(-1)(-x) = 1+x \quad , k=-1 \text{ ve } x \text{ yerine } -x$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}5x^4 \quad , k=\frac{1}{3} \quad x \to 5x^4$$

Tanım (Diferansiyel): x bağımsız değişkenin diferansiyeli sıfırdan farklı Δx değerine eşittir ve dx ile gösterilir. Yani $\Delta x = dx$ dir.

f, x noktasında diferansiyellenebilir ise, y bağımlı değişkeninin diferansiyeli dy ile gösterilir ve

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

olur.

Örnek: $f(x) = 5x^2+4x+1$ fonksiyonu için Δy ve dy değerlerini bulunuz.

$x=6$, $\Delta x = dx = 0,02$ için Δy ve dy değerlerini karşılaştırınız.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (5(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x)+1) - (5x^2+4x+1)$$

$$\Rightarrow \Delta y = 10x\,\Delta x + 4\Delta x + 5(\Delta x)^2 = (10x+4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$$

$f'(x) = 10x+4$ ve $dy = f'(x)dx$ kullanılırsa

$dy = (10x+4)dx$ olur.

$$\Rightarrow \Delta y = (10x+4)\Delta x + 5(\Delta x)^2 = dy + 5(\Delta x)^2$$

$$\Delta y = dy + 5(\Delta x)^2$$

olur.

$x=6$, $\Delta x = 0{,}02$ için

$$\Delta y = 10x\,\Delta x + 4\Delta x + 5(\Delta x)^2$$
$$= 10.6.(0{,}02) + 4.(0{,}02) + 5(0{,}02)^2$$
$$= 1{,}282$$

$$dy = (10x+4)\Delta x = (10.6+4)(0{,}02) = 1{,}28$$

cevaptaki fark ise $5(\Delta x)^2 = 5(0{,}02)^2 = 0{,}002$ dir.

Bu örnekte $\Delta y = 1{,}282$ değeri $x=6$ dan $x=6{,}02$ ye yaklaşırken, $f(x) = 5x^2+4x+1$ fonksiyonunda meydana gelen hatasız değişim miktarıdır. $dy = 1{,}28$ diferansiyeli ise fonksiyonda meydana gelen yaklaşık değişim miktarını temsil eder.

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$ dir.

$x = a$ ve $\Delta x = dx = x - a$ alınırsa

$f(x) \approx L(x)$ elde edilir.

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

elde edilir. Böylece f nin x deki değerini bulmak için $f(a)$ ve $f'(a)$ değerleri kullanılırsa $f(x)$ e yaklaşık bir değer bulunabilir.

Örnek: $(2,01)^3$ yaklaşık değerini bulunuz.

$f(x) = x^3$ fonksiyonu tanımlayalım.

$x = 2$ ve $\Delta x = 0{,}01$ için

$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3$ ifadesinin yaklaşık değerini hesaplayalım.

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2 . \Delta x$$

$x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$ değerleri yazılırsa

$(2{,}01)^3 \approx 2^3 + 3 . 2^2 (0{,}01) = 8{,}12$ bulunur.

Örnek: $\sqrt[3]{25}$ in yaklaşık değeri

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $x = 25$, $a = 27$ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ $f(a) = 3$

$$f(x) = \sqrt[3]{25} \cong 3 + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} (25-27) \cong \frac{79}{27}$$

Örnek: sin 33 ün yaklaşık değeri?

$x = 33°$ yani $x = 33 \cdot \frac{\pi}{180}$ radyan "$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$"

$a = 30 = \frac{\pi}{6}$ bilinen en yakın açı

$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$

$$\sin 33 = f(33) = f\left(33 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cong f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{33\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cong \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{60} \cong 0{,}53$$

Türevin ve Diferansiyelin Geometrik Yorumları

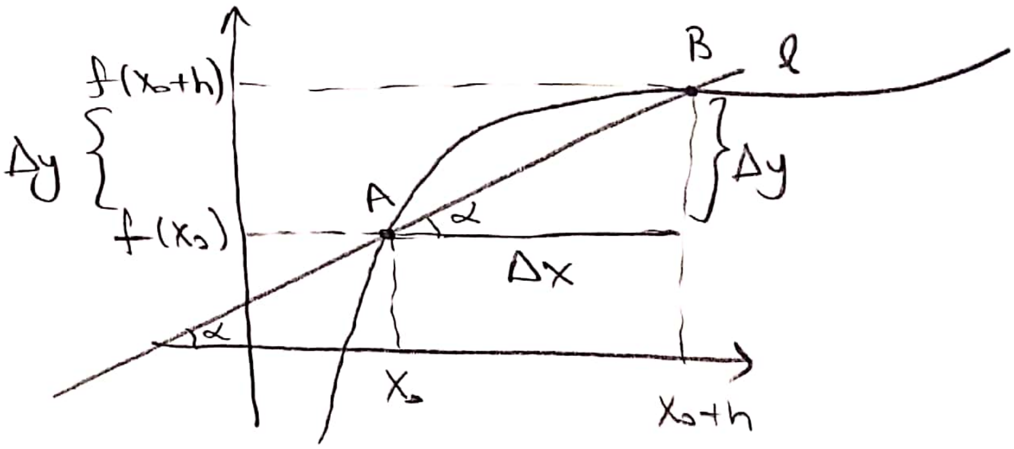
$y = f(x)$ fonksiyonu bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının δ-komşuluğunda tanımlı ve türevlenebilir olsun. Şimdi x_0'a h artırımı yapalım, ve fonksiyondaki değişimi $\Delta y = \Delta f(x)$ ile gösterelim. Buradan

$$\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$$
$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

olarak bulunur.

$A(x_0, f(x_0))$, $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$ noktalarından geçen l doğrusunu alalım.



l doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α ise $\tan\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ dir.

B noktasını A noktasına yaklaştırırsak yani $h \to 0$ götürürsek l doğrusu A noktasında f nin grafiğine teğet olan doğru olur. Bu teğet doğrusu için limit $h \to 0$ değişir.

$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x)}{h}$ olur. Bu ise türev tanımında $f'(x_0)$ a eşittir. Sonuç olarak $y = f(x)$ eğrisine x_0 apsisli noktada çizilen teğetin eğimi o noktadaki türevidir. $f'(x_0) = m_{x_0}$ dir. Buna göre $y = f(x)$ eğrisine x_0 apsisli noktada teğet olan doğru denklemi

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

dır.

Bu teğet doğrusunun denklemi ile fonksiyonun x_0 noktasındaki lineerleştirmesi aynı şeydir.